Лекция 5
ОЦЕНКИ СНИЗУ ПОЛИНОМА (ТЕОРЕМА КАРТАНА) И ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Теорема Картана. Для $\forall H > 0$ и любого набора точек $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n \in \mathbb{N}$ можно указать в комплексной плоскости систему кружков с общей суммой радиусов $2H$ такую, что вне этих кружков выполняется неравенство

$$\left|(z - a_1)(z - a_2)\cdots(z - a_n)\right| > \left(\frac{H}{e}\right)^n.$$

Доказательство. Возьмем наименьший выпуклый многоугольник, содержащий все точки a_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, и при этом какая-нибудь точка a_j является вершиной этого многоугольника. Можно построить окружность, содержащую внутри только точку a_j, радиус которой равен λK, $K = \dfrac{H}{n}$, λ — кратность точки a_j. Окружность, радиус которой равен μK и внутри которой содержится ровно μ точек из системы $\{a_k\}$, назовем *окружностью класса A*. Из всех окружностей класса A выберем окружность с наибольшим радиусом и обозначим ее C_1 (таких окружностей может быть несколько, выберем одну из них). Пусть радиус окружности C_1 равен $\lambda_1 K$. Заметим, что круг радиуса λK, $\lambda \geq \lambda_1$ не может содержать из системы $\{a_k\}$ точек в количестве, большем λ.

Точки, попавшие в окружность C_1, назовем *точками ранга* λ_1. Отбросим все точки ранга λ_1 и для оставшихся точек из системы $\{a_k\}$ построим окружность C_2 класса A и наибольшего радиуса. Пусть ее радиус равен $\lambda_2 K$ (окружность содержит внутри себя λ_2 точек из числа $(n - \lambda_1)$ точек). Покажем, что $\lambda_2 \leq \lambda_1$. Если $\lambda_2 > \lambda_1$, то окружность C_2 содержит внутри себя либо λ_2 точек из системы $\{a_k\}$, либо $\lambda > \lambda_2$ точек. Первое предположение противоречит тому, что C_1 — окружность максимального радиуса и класса A. Второе предположение противоречит сделанному выше замечанию.

Пусть точки, попавшие в окружность C_2 из оставшихся $(n - \lambda_1)$ точек, — это точки ранга λ_2. Так как всех точек $\{a_k\}$ конечное число, то получим последовательность окружностей $C_1, C_2, \ldots, C_p$ с радиусами $\lambda_1 K, \lambda_2 K, \ldots, \lambda_p K$, причем $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_p$ и $K(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_p) = H$.

Построим концентрические с окружностями $C_1, C_2, \ldots, C_p$ окружности $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_p$ с радиусами $2\lambda_1 K, 2\lambda_2 K, \ldots, 2\lambda_p K$. Возьмем точку z

вне $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_p$. Опишем окружность C_z с центром в точке z и радиусом λK, где λ — натуральное число. Пусть окружность C_z пересекается с окружностью C_j, тогда расстояние между точкой z и центром α_j окружности C_j удовлетворяет условию

$$|z-\alpha_j| > 2\lambda_j K, \qquad |z-\alpha_j| \le \lambda K + \lambda_j K.$$

Тем самым $\lambda > \lambda_j$ и внутри окружности C_z могут быть только точки из системы $\{a_k\}$ ранга меньше λ.

Покажем, что внутри C_z лежит не более $(\lambda - 1)$ точек из системы $\{a_k\}$. Пусть внутри окружности C_z лежит $\mu \ge \lambda$ точек. Обозначим $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ точки из системы $\{a_k\}$, оставшиеся после удаления из этой системы точек ранга не меньше λ. Тем самым внутри окружности C_z радиуса λK содержится $\mu \ge \lambda$ точек из $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$. Если $\mu = \lambda$, то это противоречит определению ранга (оставшиеся точки ранга меньше λ). Если $\mu > \lambda$, то это противоречит замечанию, сделанному выше. Итак, внутри окружности C_z содержится не более $(\lambda - 1)$ точек из системы $\{a_k\}$.

Перенумеруем все точки из системы $\{a_k\}$ в порядке возрастания их расстояния от точки z. В окружности C_z радиуса mK могут быть только точки $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$, поэтому

$$|z-a_m| > mK, \qquad m = 1, 2, \ldots, n.$$

Окончательно

$$\left|(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_n)\right| > n!K^n = n!\left(\frac{H}{n}\right)^n > \left(\frac{H}{e}\right)^n.$$

Теорема Картана доказана. ■

Рассмотрим целую функцию $f(z)$ конечного порядка ρ. Пусть $\{z_n\}$, $|z_1| \ge |z_2| \ge \ldots, |z_n| \uparrow \infty$ — последовательность ее нулей. Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.1. Вне кружков $|z-z_n| < |z_n|^{-q}$, $q > \rho$ имеет место оценка

$$|f(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}}, \qquad r > r_0(\varepsilon), \;\; \varepsilon > 0.$$

Доказательство. По доказанной ранее теореме Бореля

$$f(z) = z^{\lambda} e^{h(z)} F(z),$$

где λ — кратность нуля; $h(z)$ — многочлен степени $h \le \rho$; $F(z)$ — каноническое произведение.

Для канонического произведения $F(z)$ была доказана оценка снизу (см. лемму 4.1): вне кружков $|z-z_n| < |z_n|^{-q}$, $q > \rho$

$$|F(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}}, \quad r > r_0(\varepsilon),\ \ \varepsilon > 0.$$

Следовательно,

$$|f(z)| > e^{-ar^h} e^{-r^{\rho+\varepsilon}} > e^{-r^{\rho+2\varepsilon}}. \ ■$$

Пусть теперь функция $f(z) \in A(\mathbb{C})$ порядка не выше $\rho < \infty$ и последовательность $\{z_n\}$ — последовательность ее нулей с кратностями m_1, m_2, ..., m_n, ..., функция $\varphi(z) \in A(\mathbb{C})$ порядка не выше $\rho < \infty$, для которой последовательность $\{z_n\}$ есть последовательность нулей с кратностями не меньше $m_1, m_2, ..., m_n, ...$. Функция $\varphi(z)$ может иметь и другие нули.

Теорема 5.2. Функция $F(z) = \dfrac{\varphi(z)}{f(z)}$ — целая функция порядка не выше ρ.

Доказательство. По теореме 5.1 вне кружков $|z - z_n| < |z_n|^{-h}$, $h > \rho$ справедливо неравенство

$$|f(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}}, \quad r > r_0(\varepsilon),\ \ \varepsilon > 0. \tag{5.1}$$

Пусть $p = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|^{-h}$ и $q > p$. Существуют окружности $|z| = r_r$, $r_k \to +\infty$, $r_{k+1} - r_k \le q$, на которых выполняется оценка (5.1). Поэтому на этих окружностях $|z| = r_k$ имеем неравенство

$$|F(z)| \le e^{r^{\rho+2\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0,\ \ r = r_k,\ \ k \ge k_0(\varepsilon).$$

Следовательно, при $r_k \le |z| \le r_{k+1}$ справедлива оценка

$$|F(z)| \le \max_{|t|=r_{k+1}} |F(t)| \le e^{r_{k+1}^{\rho+2\varepsilon}} \le e^{(|z|+q)^{\rho+2\varepsilon}} < e^{|z|^{\rho+3\varepsilon}}.$$

Тем самым порядок функции $F(z)$ не выше ρ. Теорема доказана. ■

Следствие. Пусть $f(z) \in A(\mathbb{C})$ порядка ρ, $\varphi(z) \in A(\mathbb{C})$ порядка меньше ρ. Тогда $F(z) = \varphi(z)f(z)$ имеет порядок, равный ρ.

Доказательство. Если бы функция $F(z)$ имела порядок меньше ρ, то по доказанной теореме 5.2 функция $f(z) = \dfrac{F(z)}{\varphi(z)}$ имела бы порядок меньше ρ, но это не так. Тем самым $F(z)$ имеет порядок, равный ρ. ■

Определение. Точки $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ называются ***A-точками функции*** $f(z)$, если $f(a_i) = A$, $\quad a_i, A \in \mathbb{C}$.

Теорема 5.3. Пусть $f(z) \in A(\mathbb{C})$ порядка ρ, $0 < \rho < +\infty$. Если ρ — не целое, то последовательность A-точек имеет показатель сходимости $\tau_A = \rho$ при любом $A \in \mathbb{C}$. Если ρ — целое, то последовательность A-точек имеет показатель сходимости $\tau_A = \rho$ для всех A за исключением, быть может, одного значения A.

Доказательство. Функция $\varphi(z) = f(z) - A$ имеет порядок ρ. Если ρ — не целое, то по теореме Бореля $\tau_A = \rho$.

Пусть теперь ρ — целое и пусть для некоторых A и B имеем $\tau_A < \rho$, $\tau_B < \rho$. Тогда

$$f(z) - A = e^{P(z)}\varphi(z), \qquad f(z) - B = e^{Q(z)}\psi(z),$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — целые функции порядков меньше ρ, а $P(z)$ и $Q(z)$ — многочлены степени ρ. Отсюда

$$A - B = e^{Q(z)}\psi(z) - e^{P(z)}\varphi(z).$$

Продифференцируем равенство и получим

$$0 = e^{Q(z)}[Q'(z)\psi(z) + \psi'(z)] - e^{P(z)}[P'(z)\varphi(z) + \varphi'(z)].$$

Функции $Q'(z)\psi(z) + \psi'(z)$ и $P'(z)\varphi(z) + \varphi'(z)$ не могут тождественно равняться нулю.

Предположим противное: $Q'(z)\psi(z) + \psi'(z) \equiv 0$, тогда $\psi(z) = e^{-Q(z)+c}$, следовательно, $\psi(z)$ — целая функция порядка ρ, чего не может быть.

Итак, функции $Q'(z)\psi(z) + \psi'(z)$ и $P'(z)\varphi(z) + \varphi'(z)$ тождественно не равны нулю, тогда

$$e^{Q(z)-P(z)}[Q'(z)\psi(z) + \psi'(z)] = P'(z)\varphi(z) + \varphi'(z). \tag{5.2}$$

Пусть многочлены $P(z)$ и $Q(z)$ имеют вид

$$P(z) = az^{\rho} + \ldots, \qquad Q(z) = bz^{\rho} + \ldots .$$

Если $a \neq b$, то в равенстве (5.2) слева стоит функция порядка ρ, а правая часть есть целая функция порядка меньше ρ, тем самым $a = b$. Отсюда

$$(A - B)e^{-az^{\rho}} = e^{Q_1(z)}\psi(z) + e^{P_1(z)}\varphi(z),$$

где $P_1(z)$, $Q_1(z)$ — многочлены степени меньше ρ, чего быть не может, т.е. предположение, что при разных A и B выполнены условия $\tau_A < \rho$, $\tau_B < \rho$, неверно. Теорема доказана. ■

Примеры

1. Функция $f(z) = e^z$ имеет порядок $\rho = 1$. Исключительное значение $A = 0$.

2. Функция $f(z) = \sin z \cdot e^{z^2}$ имеет порядок $\rho = 2$. Исключительное значение $A = 0$, так как $\tau_A = 1$.

Задачи

I. Сравнить теорему 5.3 и большую теорему Пикара (рассмотреть точку $z = \infty$).

II. Пусть $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — целые функции одного порядка и типов σ_1, σ_2 соответственно, $\sigma_1 < \sigma_2$. Что можно сказать о порядке и типе функций $f_1(z) f_2(z)$ и $f_1(z) + f_2(z)$?

III. Пусть $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — целые функции одного порядка и одного типа. Что можно сказать о порядке и типе функций $f_1(z) f_2(z)$ и $f_1(z) + f_2(z)$?

IV. Пусть $f(z)$ есть целая функция порядка ρ, $0 < \rho < \infty$. Доказать, что если ρ — не целое, то $F(z)$ имеет бесконечно много нулей.

V. Привести пример целой функции дробного порядка.

VI. Доказать, что функция $F(z) = \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 - \dfrac{z}{n^3}\right)$ — целая. Для $\forall A \in \mathbb{C}$ уравнение $F(z) = A$ имеет бесконечно много решений.